1) $(K, \leq)$ dağılımlı kafes olsun. $(K, \leq)$ modüler kafes mi?

Yani; $\forall a,b,c \in K$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ olur mu?

$a \leq c \Rightarrow a \vee c = c$ dir. --- ⊛

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, K dağılımlı kafes

$= (a \vee b) \wedge c$, ⊛ dan

$\therefore$ $(K, \leq)$ modüler kafestir.

2) $A = \{ n \in \mathbb{N}^* : f(n) = g(n) \}$ olsun. $A = \mathbb{N}^*$ olduğunu gösterelim

- $f(1) = g(1)$ olduğundan $1 \in A$ dır.
- $n \in A$ olsun $n^+ \in A$ mı?

$n \in A \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ için $f(n) = g(n)$ dir. --- ⊛

$n^+ \in A \overset{?}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^*$ için $f(n^+) = g(n^+)$

$f(n^+) = f(n)^+$, tanımdan

$= g(n)^+$, ⊛ dan

$= g(n^+)$, tanımdan

$\Rightarrow n^+ \in A$

$\Rightarrow A = \mathbb{N}^*$

$\therefore$ $f = g$ elde edilir.

3) A iyi sıralı bir küme olsun. Bu durumda A sıralı bir küme ve A nın her alt kümesinin en küçük elemanı vardır. O halde $a, b \in A$ elemanları yardımıyla oluşturulan A kümesinin $\{a, b\}$ alt kümesinin de en küçük elemanı olacağından a ve b elemanları karşılaştırılabilirdir.

O halde A sıralı kümesi tam sıralıdır.

4) $x < y \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* \ni y = x + k_1$

$z < t \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* \ni t = z + k_2$

$$yt + xz = (x + k_1)t + xz$$
$$= xt + k_1 t + xz$$
$$= xt + k_1(z + k_2) + xz$$
$$= xt + k_1 z + k_1 k_2 + xz$$
$$= xt + k_1 z + xz + k_1 k_2$$
$$= xt + (k_1 + x)z + k_1 k_2$$
$$= xt + yz + k_1 k_2$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \in \mathbb{N}^* \\ k_2 \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow xt + yz < yt + xz$$

5) a) $[3,2] \oplus [x,1] = [3+x, 3] = [5,3]$

$$\Leftrightarrow 3 + x + 3 = 3 + 5$$
$$\Leftrightarrow 6 + x = 8$$
$$\Leftrightarrow 6 + x = 6 + 2$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

b) $\forall [a,b] \in \mathbb{Z}$ için $[a,b] \oplus [x,y] = [a,b]$ olacak şekilde $[x,y] \in \mathbb{Z}$ elemanını bulmalıyız.

$$[a,b] \oplus [x,y] = [a+x, b+y]$$
$$= [a,b]$$

$$\Leftrightarrow a + x + b = b + y + a \quad \Leftrightarrow a + b + x = b + a + y$$
$$\Leftrightarrow (a+b) + x = (a+b) + y$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

$\therefore [x,y] = [x,x]$

$\therefore \forall [a,b] \in \mathbb{Z}$ için $[a,b] \oplus [x,x] = [a,b]$ dir.

6) a) $x \mid y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni y = xk$

$x \mid z \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ni z = xk_1$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$ için $my = mxk$, $nz = nxk_1$ elde edilir.

$\Rightarrow my + nz = mxk + nxk_1$

$= x(mk + nk_1)$

$\Rightarrow x \mid my + nz$

b) $d = ebob(a,b)$, $k = ebob(a+cb, b)$ olsun.

$d = ebob(a,b) \Rightarrow d \mid a, d \mid b$

$\Rightarrow d \mid a, d \mid cb$

$\Rightarrow d \mid a+cb, d \mid b \Rightarrow d \mid k$

$k = ebob(a+cb, b) \Rightarrow k \mid b, k \mid a+cb$

$\Rightarrow k \mid b, k \mid bc, k \mid a+cb$

$\Rightarrow k \mid b, k \mid a$

$\Rightarrow k \mid d$

$$\left.\begin{matrix} d \mid k \\ k \mid d \end{matrix}\right\} \Rightarrow k = d$$